OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019
CLASA a V-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1, autor : Vlad Florentin Drinceanu

a) Considerăm numerele naturale nenule mai mici decât 4001 care sunt pătrate perfecte.
Câte dintre aceste numere nu se divid cu 5 ?

b) Se consideră numerele : $a = 222222 \cdot 999999$ şi $b = 333333 \cdot 666667$.

Fără a efectua înmulţirea celor două numere, să se determine care este mai mare.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $1 \le a^2 \le 63^2$, $a^2 \ne 25k^2$	2p
Cum $k^2 \le 160$, $k \le 12$; Sunt $63 - 12 = 51$ numere.	2p
b) $a = 18 \cdot 111111^2$; $b >$ $333333 \cdot 666666 = 18 \cdot 111111^2$	2p
Concluzie $a < b$	1p

Enunţ subiect 2, autor : Daniela Chiteş.

Există numere naturale x şi y care verifică egalitatea: $x^2 - 7y^2 = 2019$?

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Restul împărţirii numărului 2019 la 7 este 3, deoarece $2019 = 7 \cdot 288 + 3$	1p
$x^2 = 7y^2 + 2019$	1p
Membrul drept este de forma $M7 + 3$	1p
Demonstrarea că x^2 poate avea doar formele : $M7 , M7+1, M7+2 , M7+4$	3p
Finalizare	1p

Enunţ subiect 3, autor : Costel Chiteş, Liliana Maria Toderiuc Fedorca

Se consideră numărul $a = 23^{4n+3} + 8 \cdot 23^{4n+2} + 101$, unde n este un număr natural.

Să se determine ultima cifră a câtului obţinut prin împărţirea lui a prin 31.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$23^{4n+2}(23+8)+101 = 23^{4n+2} \cdot 31 + 31 \cdot 3 + 8 = 31\left(23^{4n+2}+3\right)+8$	3p
Identificarea câtului $c = 23^{4n+2} + 3$ $u\left(23^{4n+2}+3\right) = u\left(3^{4n+2}+3\right) = u(9+3) = 2$	1p 3p

Enunţ subiect 4, autor Vasile Scurtu, G.M.11 /2018

Determinaţi numerele naturale a, b, c pentru care $2^a + 4^b + 8^c = 16^{100}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$2^a + 2^{2b} + 2^{3c} = 2^{400}$	1p
Dacă $3c = 399$ atunci $c = 133$ şi $2^a + 2^{2b} = 2^{399}$	1p
Dacă $a = 399$, atunci $2^{2b} = 0$, contradicţie. Deci $a \le 398$. Atunci $2^a + 2^{2b} \le 2^{398} + 2^{398}$ sau $2^a + 2^{2b} \le 2^{399}$. Egalitatea are loc pentru $a = 398, b = 199$	2p
Dacă $3c < 399$, atunci $3c \le 396$ şi deducem $2^a + 2^{2b} + 2^{3c} \le 2^a + 2^{398} + 2^{396} \le 2^{399} + 2^{398} + 2^{396} < 2^{399} + 2^{398} + 2^{398} = 2^{400}$	2p
$a = 398$, $b = 199$, $c = 133$	1p